DPTO. MATEMÁTICA APLICADA
FACULTAD DE INFORMÁTICA (UPM)

TRABAJO DE GRUPO
Series de potencias

CÁLCULO II (Curso 2011-2012)

MIEMBROS DEL GRUPO (por orden alfabético)	NOTA:
APELLIDOS	NOMBRE

Este trabajo sobre sucesiones de funciones y series de potencias tiene varias partes que hay que entregar:

1. Actas de las reuniones

1. Fecha, hora, lugar y duración de la reunión, los asistentes.
2. Acuerdos tomados: reparto del trabajo entre los miembro del grupo, visto bueno del trabajo realizado por cada miembro del grupo, etc.
3. Dudas planteadas por algún miembro del grupo y si han sido resueltas.

2. Desarrollos de funciones en series de potencias

En esta parte se hará el desarrollo en serie de potencias de algunas funciones, aplicando diferentes métodos, algunos que se han realizado en clase y otros que no. Además de hacer los desarrollos de las funciones que se piden, hay que buscar los métodos que no se han explicado en clase, dando al menos tres referencias bibliográficas adecuadas (pueden ser direcciones web, pero al menos una tiene que ser un libro), explicarlos y aplicarlos en los casos propuestos.

2.1 Desarrollos notables de funciones en series de potencias.
Halla el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones, a partir del polinomio de Taylor centrado en cero.

1.	$f(x) = e^x$	2.	$\dfrac{1}{1+x}$	3.	$\ln(1+x)$
4.	$\sinh x$	5.	$\cos x$	6.	$\sin x$

Para ello hay que realizar los siguientes pasos:

I) calcular las primeras derivadas de la función.

II) Sacar una fórmula general para la derivada n-ésima y demostrarla por inducción.
Observación: Nótese que en algunos ejercicios, una función es derivada de otra (salvo signo), por lo que la derivada n-ésima de una es la derivada $(n+1)$-de la otra y, por tanto, la demostración es igual y no es necesario repetirla.

III) Demostrar que el error tiende a cero para valores de x menores que el radio de convergencia.

2.2 Desarrollos en serie de potencias a partir de la serie geométrica.
Calcula los siguientes desarrollos en serie de potencias a partir de la serie geométrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

1. $\dfrac{1}{1+x}$. Comprueba que se obtiene la misma serie que en el ejercicio anterior.

2. $\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Comprueba, a partir de la derivada de la serie geométrica, que es una serie aritmético-geométrica.

2.3 Desarrollos en serie de potencias a partir de otras series conocidas.
En este ejercicio hay que obtener los desarrollos en serie de potencias de las funciones siguientes a partir de las series de potencias de los apartados anteriores por diferentes métodos (sustitución, integración, derivación, suma o resta de funciones, productos de funciones por polinomios, dividir por potencias de x, ...).

1. $\ln\sqrt{1+x}$. A partir de $\ln(1+x)$.

2. $\ln(1-x)$. Por sustitución.

3. $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$. Resta de funciones.

4. $\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$. Multiplicando por x^2.

5. $2x(e^{3x}+5x)^2$. A partir de la exponecial, desarrollando el binomio.

6. $\dfrac{\sin x}{x}$. A partir se la serie de $\sin x$ y dividiendo por x. ¿Se puede calcular de la misma forma $\dfrac{\cos x}{x}$ y $\dfrac{e^x-1}{x}$? ¿Por qué?

7. $\arctan x$. Por integración.

8. $\dfrac{3x-1}{(1-x)^3}$. Por derivación obtener la serie de $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

9. Encuentra algún otro ejemplo de función de la que puedas obtener su serie de potencias a partir de alguno de los métodos anteriores.

2.4 Series de potencias de funciones racionales.
Este tipo de desarrollo en serie de potencias no se ha visto en clase.

I) Busca información donde se explique el método para obtener el desarrollo en serie de potencias de una función racional, dando al menos tres referencias bibliográficas adecuadas (pueden ser direcciones web, pero al menos una tiene que ser un libro).

II) Explica el método y describe algún otro caso en él que hayas visto que se utilice este método.

III) Aplica el método para hallar el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones racionales y su radio de convergencia.
1. $\dfrac{5x-3}{1+x^2}$ 2. $\dfrac{3x}{9+x^2}$ 3. $\dfrac{2x+1}{x^2-6x+8}$ 4. $\dfrac{1}{(x-3)(1+x^2)}$

3. Serie binómica

La función $f(x)=(1+x)^m$, con $m\in\mathbb{R}$ tiene como desarrollo en serie de potencias la llamada serie binómica, definida de la forma

$$f(x)=(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n \quad \text{para } -1<x<1$$

Resuelve las siguientes cuestiones:

1. ¿Cómo se define el número combinatorio $\binom{\frac{3}{2}}{5}$?

2. ¿Cuántos sumandos tiene la serie binómica si $m=24$?

3. Calcula el desarrollo en serie de la función $\sqrt{1+x}$.

4. Calcula el desarrollo en serie de la función $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

5. Calcula el desarrollo en serie de potencia de la función $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

6. A partir del desarrollo en serie de la función anterior, calcula el de la función $\dfrac{5x^2-1}{(1-x)^3}$.

7. Describe algún otro ejemplo de función racional de la que puedas calcular su serie de potencias a partir de la serie binómica, sin necesidad de descomponer en fracciones simples.

4. Aplicaciones de las series de potencias

En esta parte vamos a ver dos aplicaciones de las series de potencias: La obtención de la suma e series numéricas y la equivalencia entre infinitésimos.

4.1 Suma de series numéricas. Calcula, si es posible la suma de las series numéricas siguientes, a partir de las series de potencias de los apartados anteriores, según se indica en cada caso. En caso de que no sea posible, explica la razón.

1. A partir de la exponencial e^x. i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$ iv) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2. A partir de la serie de $\ln(1+x)$.

   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\frac{1}{3^n}$

3. A partir de la serie de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

   i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{2^n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^n$

4. A partir de la serie de $\sqrt{1+x}$.

   i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}3^n$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{4^n}$

4.2 Infinitésimos equivalentes.

1. Busca bibliografía donde se defina qué son los infinitésimos equivalentes dando al menos tres referencias bibliográficas adecuadas (pueden ser direcciones web, pero al menos una tiene que ser un libro).

2. Escribe la definición de infinitésimos equivalentes, dando la referencia bibliográfica de la que se ha sacado.

3. Explica qué son infinitésimos equivalentes con tus propias palabras, poniendo ejemplos de cuándo se pueden utilizar y cuándo no.

4. Demuestra utilizando series de potencias que los siguientes infinitésimos son equivalentes.

   i) $\sin x \approx x$ ii) $\cos x - 1 \approx \dfrac{x^2}{2}$ iii) $\ln(x+1) \approx x$ iv) $e^x - 1 \approx x$

5. Práctica de laboratorio

Acaba la práctica de laboratorio y realiza además el siguiente ejercicio.
Comprueba gráficamente que en algún intervalo la serie converge a la función, verificándose que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

1. Calcula la serie que se obtiene integrando término a término y comprueba gráficamente que converge a la función $\ln(x+1)$ en $(-1, 1]$.

2. ¿Se aproxima bien cerca de 1 y de -1? ¿Hay convergencia uniforme en $(-1, 1]$?

3. Encontrar dos intervalos distintos (uno contenido en el otro) de forma que la convergencia sea uniforme. Encontrar, para el menor de estos intervalos, un número n de forma que la suma de los n primeros términos de la serie de potencias este a menor distancia de la función que $\varepsilon = 10^{-3}$. Comprobar si este valor de n vale para que se cumpla la misma condición en le segundo intervalo. Representa esas gráficas.

4. Comparar el valor numérico que da Maple para los primeros términos de serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ con el valor que da para $\ln 2$. Encontrar (con Maple) valores de m que hagan que esta diferencia sea menor que $10^{-3}, 10^{-5}$. Comprobar que el término del error correspondiente al polinomio de Taylor $P_{0,m}$ es menor que ese valor.